一次元離散力学系を生成する母関数とその導関数(低次元カオスI,カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):
紺野, 公明; 入江, 治行; 島田, 一平

CITATION:
紺野, 公明 ...[et al]. 一次元離散力学系を生成する母関数とその導関数(低次元カオスI,カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1986, 46(2): 160-162

ISSUE DATE:
1986-05-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/92028

周期カオスが合併するのだが，$D \neq 0$ではまず1つのカオスが basin boundary をこえ，消滅し (boundary crisis)，次にもう1つのカオスが成長して消えたアトラクタの領域を埋め (interior crisis)，周期が半減した2倍の大きさのカオスとなる (図5)。

図 5

Dが大きくなると，上でのべたような分岐線が交差し，周期解とカオスの共存など，さらに複雑になってゆく。

一次元離散力学系を生成する母関数とその導関数

日大・理工　紺野公明，入江治行
日大・原研　島田一平

最近，力学系を複素化し，その解析的性質より力学系の性質を調べる試みがなされている。複素化の1つの方法に微分方程式の独立変数を複素化し，解の解析的性質をもとに方程式の可積分性とか，軌道の規則・不規則性の議論がなされている。ここ我々が新しく議論する力学系の複素化の方法は，山口・畑により導入された力学系を生成する母関数の展開パラメタを複素化し，その母関数の解析的性質より力学系が示す規則・不規則性を考察することである。

力学系が示す軌道の不安定性を表す量に Lyapunov 指数がある。力学系を生成する母関数は軌道の振舞を表すが，その軌道の持つ不安定性までは表現できない。そこで我々はその情報を得るために母関数の形式的高階導関数を導入する。特に一階導関数は軌道不安定性を表す Lyapunov 指数と密接に関係していることが示される。

母関数F_0の収束半径とその形式的一階導関数F_1の収束半径にはなんら関係はない。もし母関数の収束半径が一階導関数のそれより大きいなら，母関数は連続であるが微分不可能な領域をもち，フラクタルな性質を示す。

この報告では，一次元離散力学系を例に次の事をしめす：

(1)　F_0とF_1の解析的性質，

(2)　F_1の収束半径と Lyapunov 指数との関係，

(3)　F_0のフラクタル性。

§ 1. 母関数と形式的高階導関数

一次元離散力学系を考える：

$$X_{n+1} = \psi(a, X_n)$$

複素展開パラメタ t を持つ母関数を導入する：

$$F_0(t, X_0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(X_0)\, t^n$$

ここで $X_n(X_0)$ は X_0 を初期値とする力学系 ψ の軌道である。次に形式的 k 階導関数を導入する：

$$F_k(t, X_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k X_n}{\mathrm{d} X_0^k} t^n$$

周期解の母関数とその一階導関数の解析的性質について次の事が明らかになった。まず F_0 は周期の数だけの位数 1 の極を $|t| = 1$ の円周上に持つ。2^{n-1} 周期解から 2^n 周期解へくま手分岐をすると極の位置と数は，その円周上偏角 $2\pi/2^{n-1} * M (M = 0, 1, \cdots, 2^{n-1}-1)$ の位置で 2^{n-1} 個から偏角 $2\pi/2^n * N (N = 0, 1, \cdots, 2^n-1)$ の位置で 2^n 個に倍化する。そして F_1 も周期の数だけの位数 1 の極を持ち，パラメタ a で決まる $1 \leqq |t| \leqq \infty$ の同心円上に分布する。2^{n-1} 個の極を持つ 2^{n-1} 周期解の極が $|t| = 1$ に接するとくま手分岐を起こし 2^n個の極を持つ 2^n 周期解へ移る。a の値を大きくすると同一円周上をまず $|t|=1$ から $|t|=\infty$ まで偏角 $2\pi/2^n*N$ で遠ざかる。$|t| = \infty$ は超安定状態と呼ばれている。そこで偏角は $2\pi/2^n * N + 2\pi/2^{n+1}$ に変わり $|t|=\infty$ から $|t| = 1$ まで戻ってき，$|t| = 1$ の円周上に極が接すると，また分岐をし，それを繰り返す。2^n 分岐の Feigenbaum 極限点 ($n \to \infty$) では F_0 と F_1 の極は $|t| = 1$ の円周上に無限個分布して自然境界を形成しカオス 状態へ移ると予想される。同様な議論は $3 * 2^n$ 等他の周期解についてもなしうる。

§ 2. F_1 の収束半径と Lyapunov 指数

F_1 は軌道の初期値に対する変化率を生成する母関数である。従って F_1 には軌道不安定性を与える情報が含まれている。我々は，次の非常に興味ある F_1 の収束半径と Lyapunov・指数との関係を得た：

「F_1 の収束半径を $t_1(X_0)$ とすると，考えている力学系の Lyapunov 指数は

$$\lambda(X_0) = -\ln(t_1(X_0))$$

で与えられる。」

例えばロジスティック写像 $X_{D+1}=aX_n(1-X_n)$ を例にとる。周期2のとき $t_1=|4+2a-a^2|^{-1/2}$ であるから $\lambda=\ln|4+2a-a^2|/2$ で与えられる。$a=4$ のとき厳密解をもちいると $t_1=1/2$ が得られ，$\lambda=\ln 2$ があたえられる。他のパラメタについて F_1 の収束半径を数値的に計算して得られた Lyapunov 指数は，軌道分離の方法から求めたそれと良い一致が見られた。

尚，一般的にくま手分岐に伴い $|d\lambda/da|$ の分岐後の値は分岐前に比べ2倍に倍化する。

§ 3. F_0 のフラクタル性

F_0 の収束半径と F_1 の収束半径は何ら関係がない。もし F_0 の収束半径 t_0 が F_1 の収束半径 t_1 より小さいなら F_0 は t について $|t|<t_0$ で連続，かつ X_0 について微分可能である。しかし，もし F_0 の収束半径が F_1 のそれより大きいと，F_0 は $|t|<t_1$ では連続かつ微分可能であるが，$t_1<|t|<t_0$ の区間では連続であるが微分不可能な関数になる。$F_0(t, X_0)$ は，その区間の t にたいして X_0 の関数としてフラクタルな性質を示す。F_0 の収束半径は $t_0=1$ で与えられる。カオス領域の Lyapunov 指数は $\lambda>0$ であるので $t_1<1$ となる。従いカオス領域で F_0 は連続であるが微分不可能な性質を示すフラクタル領域を持つ。

このフラクタルな性質を持つ母関数が直接力学系に表れる次の2次元写像を考える：

$$X_{n+1}=\Psi(a, X_n),$$
$$Y_{n+1}=(Y_n-X_n)/t.$$

この系は $Y=\pm\infty$ に2個のアトラクタをもつ。Y について逆に解くと $n=N$ のとき

$$Y_0=t^{N+1}Y_{N+1}+\sum_{n=0}^{N}X_n t^n$$

が得られる。ここで $N=\infty$ とすると Y_0 は F_0 を与える。即ち，これら2個のアトラクタの basin boundary を表していることがわかる。このとき boundary はフラクタルになり，そのフラクタル次元は $1<D_F\leqq 2$ である。